भिन्नः

अध्यायः 7

7.1 भूमिका

सुभाषः IV अपि च V कक्ष्ययोः भिन्नस्य विषये पठितवान् आसीत् । परन्तु सः अस्य विषये तथा विश्वस्तः नासीत् इत्यतः यदा कदापि तस्य अवसरः लभ्यते स्म तदा सर्वदा अपि भिन्नानां प्रयोगार्थं प्रयत्नं करोति स्म । एकः अवसरः तदा लब्धः यदा सः गृहात् आगमन-काले स्वभोजनपेटिकाम् आणेतुं विस्मृतवान् । तस्य सखी फरीदा तं तया सह भोजनं कर्तुम् आहूतवती । तस्याः भोजनपेटिकायां पञ्च पूरिकाः आसन् । अतः फरीदासुभाषौ द्वे द्वे पूरिके गृहीतवन्तौ । अनन्तरं फरीदा पञ्चमपूरिकायाः समानभागद्वयं कृत्वा एकं भागं सुभाषाय दत्तवती अपरं भागं स्वयं स्वीकृतवती । अनेन प्रकारेण फरीदा सुभाषः च द्वे पूर्ण-पूरिके अर्धम् अर्धं च पूरिकां स्वीकृतवन्तौ ।

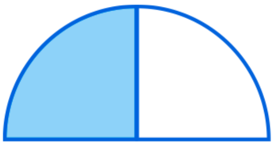
पूरिकाद्वयम् + अर्धं पूरिका - सुभाषः   पूरिकाद्वयम् + अर्धं पूरिका - फरीदा

भवद्भिः भवतां जीवने कासु स्थितीषु भिन्नानाम् उदाहरणानि लब्धानि ?

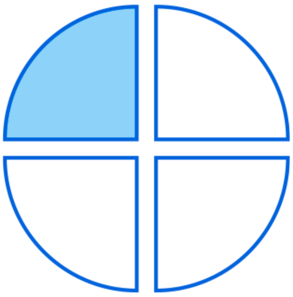
सुभाषः जानाति स्म यत् अर्धं $\frac{1}{2}$ इति लिख्यते इति । पूरिकाभक्षणसमये सः स्वस्य अर्धं पूरिकां पुनः समानभागद्वये विभाजनं कृतवान् फरीदां पृष्ठवान् यत् एषः भागः पूर्णपूरिकायाः कतमः भागः अथवा भिन्नः

अस्ति । (आकृतिः 7.1) किमपि उत्तरम् अदत्वा फरीदा अपि स्वस्याः अर्धपूरिकां समानभागद्वयेन विभाज्य

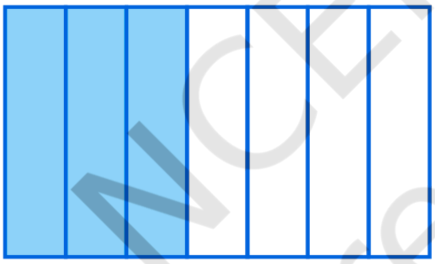
सुभाषस्य पूरिकार्धेन सह स्थापितवती । अवदत् यत् एतैः चतुर्भिः समानभागैः एका पूर्णा रोटिका भवति इति । (आकृतिः 7.2) अतः प्रत्येकं समानभागः एकस्याः पूरिकायाः चतुर्थांशः अस्ति चतुरः अपि एतान् भागान् मेलयित्वा $\frac{4}{4}$ अथवा 1 पूर्णपूरिका भवति। खादनसमये सः तां चर्चां कृतवान् यत् ते भिन्नानां विषये पूर्वं किं पठितवन्तः आसन्? $\frac{3}{4}$ इत्युक्ते, चतुर्षु समानभागेषु विभज्य त्रीन् भागान् गृह्णीमः । अनेन प्रकारेण यदा वयम् एकं पूर्णं 7 सप्त समानभागेषु विभज्य, त्रीन् भागान् गृह्णीमः । तर्हि 3/7 प्राप्यते (आकृतिः 7.3) । $\frac{1}{8}$ इत्येतदर्थं वयम् एकं पूर्णं, 8 समानभागेषु विभाजयामः, एवम् एतेषु एकं भागं स्वीकुर्मः (आकृतिः 7.4)।



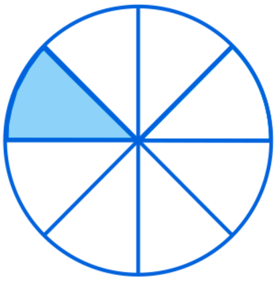
आकृति 7.1



आकृति 7.2



आकृति 7.3



आकृति 7.4

फरीदा उक्तवती यत् वयं पठितवन्तः यत् **भिन्नः इति सा सङ्ख्या अस्ति या एकस्य पूर्णस्य भागस्य निरूपणं करोति । यत् पूर्णैकाकि वस्तु भवति अथवा कश्चन वस्तूनां समूहः अपि भवितुम् अर्हति ।** सुभाषः दृष्टवान् यत् **सर्वे भागाः समानाः भवेयुः ।**

7.2 कश्चन भिन्नः

आयान्तु पुनः अस्मिन् विषये चर्चां कुर्मः ।

एकस्य भिन्नस्य अर्थः अस्ति एकस्य समूहस्य अथवा एकस्य क्षेत्रस्य कश्चन भागः ।

$\frac{5}{12}$ एकः भिन्नः अस्ति । वयम् अमुं पञ्च-द्वादशांशः इति पठामः ।

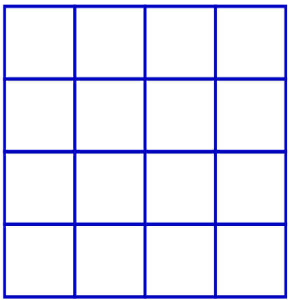
"12" किं दर्शयति ? एषः समानभागानां सा सङ्ख्या अस्ति यस्याम् एकस्य पूर्णस्य विभागाः कृताः सन्ति ।

"5" किं दर्शयति ? एषा समानभागानां सा सङ्ख्या अस्ति या सर्वेषु 12 भागेषु स्वीकृता अस्ति।
अत्र 5 अंशः 12 हरः च कथ्यते।

भिन्नस्य $\frac{3}{7}$ इत्यस्य अंशं वदन्तु। $\frac{4}{15}$ इत्यस्य भाजकः कः ?

इमां क्रीडां क्रीडन्तु।

भवन्तः भवतां मित्रैः सह इमां क्रीडां क्रीडितुं शक्नुवन्ति।
अत्र दर्शितस्य जालकस्य कानिचन प्रतिरूपाणि स्वीकुर्वन्तु।

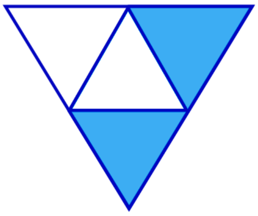


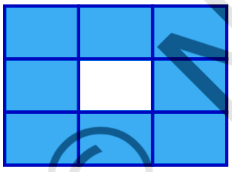
कञ्चित् भिन्नं साधयामः, कल्पनां कुर्वन्तु, $\frac{1}{2}$ इत्यस्मिन् विषये चिन्तयन्तु।

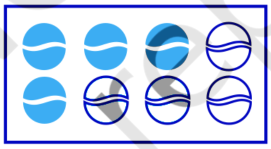
भवत्सु प्रत्येकं छात्रः कोष्ठकस्य $\frac{1}{2}$ इति भागं छायया अङ्कितं कुर्यात्।

अभ्यासः 7.1

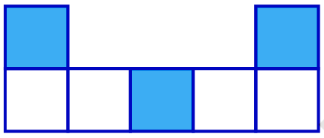
1. छायाङ्कितभागं निरूप्यमानं भिन्नं लिखन्तु।

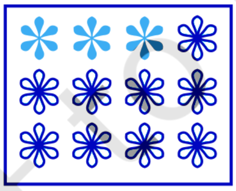

(i)

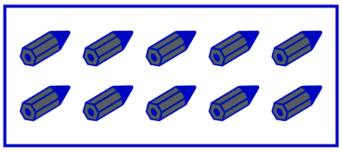

(ii)

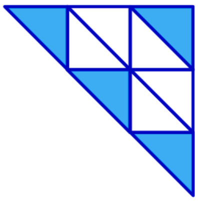

(iii)

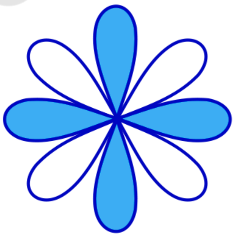
(iv)

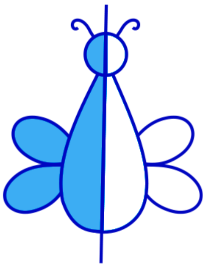

(v)


(vi)

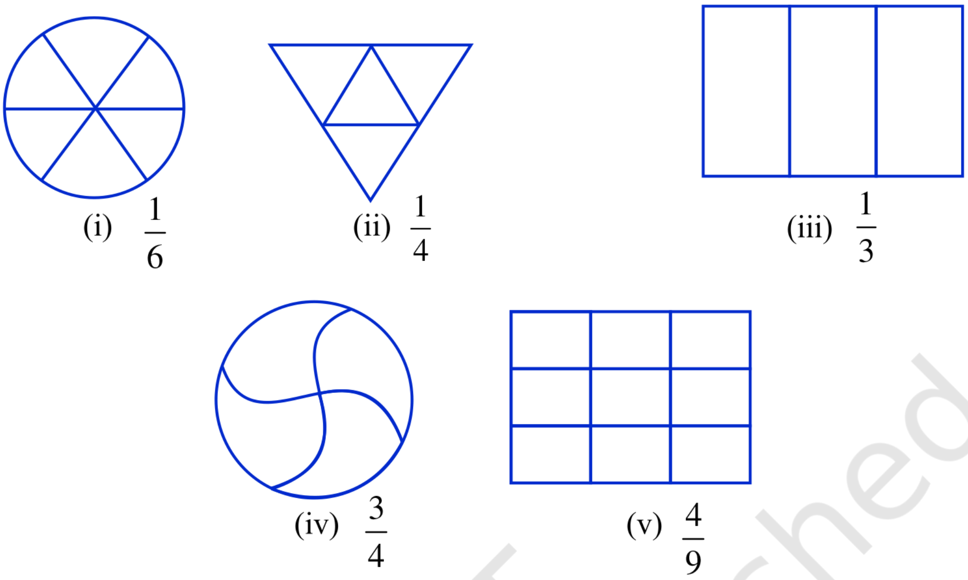

(vii)


(viii)


(ix)

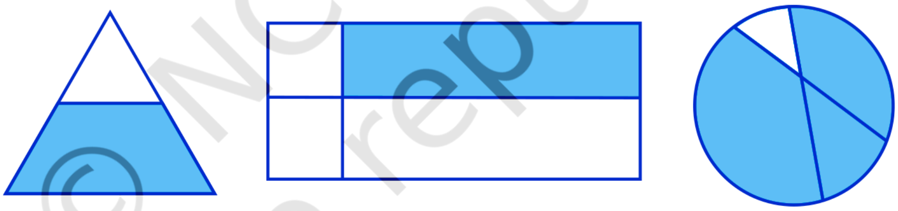

(x)

2. दत्तभिन्नानुसारं भागान् छायाङ्कितान् कुर्वन्तु।



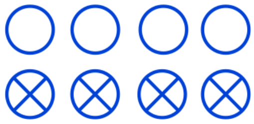
3. अधोलिखितेषु यदि दोषाः सन्ति तर्हि अभिजानन्तु।

एतत् $\frac{1}{2}$ अस्ति   एतत् $\frac{1}{4}$ अस्ति   एतत् $\frac{3}{4}$ अस्ति



4. 8 घण्टाः एकस्य दिनस्य कतमः भिन्नः अस्ति ?
5. 40 निमेषाः एकस्याः घण्टायाः कतमः भिन्नः अस्ति ?
6. आर्या, अभिमन्युः विवेकः च परस्परं भोजनं विभाज्य भक्षयन्ति । आर्या सैण्ड्-विच्-द्वयम् आनयति तस्य प्रथमः सैण्डविच् इति शाकसमन्वितं भवति अपरं च ज्याम्(jam)-समन्वितं भवति। अन्यौ द्वौ बालकौ विस्मृतिवशात् भोजन न आनीतवन्तौ। । आर्या स्वस्याः सैण्ड्-विच्-खाद्यं ताभ्यां द्वाभ्यां सह विभज्य खादितुं सिद्धा भवति यथा प्रत्येकं प्रति प्रत्येकं सैण्ड्-विच् मध्ये समानभागः लभ्येत।
   (a) आर्या स्वस्याः सैण्ड्-विच्-खाद्यं केन प्रकारेण विभाजयति चेत् प्रत्येकं कृते समानभागः लभ्यते ?
   (b) प्रत्येकं छात्रस्य कृते सैण्ड्-विच्-खाद्यस्य कतमः भागः लभ्यते ?
7. काचित् वस्त्रस्य वर्णविन्यासं करोति । तया 30 वस्त्राणां वर्णविन्यासः करणीयः आसीत् । सा एतावत्पर्यन्तं 20 वस्त्राणां वर्णविन्यासं कृतवती। सा वस्त्राणां कियतः भिन्नवर्णान् स्वीकृतवती ?
8. 2 इत्यतः 12 पर्यन्तं प्राकृतसङ्ख्याः लिखन्तु। अभाज्य-सङ्ख्याः एतासां कतमं भिन्नम् अस्ति ?
9. 102 इत्यतः 113 पर्यन्तं प्राकृतसङ्ख्याः लिखन्तु। अभाज्य सङ्ख्याः एतासां कतमं भिन्नम् अस्ति ?

10. दत्तानां कतमे भिन्ने X अस्ति ?

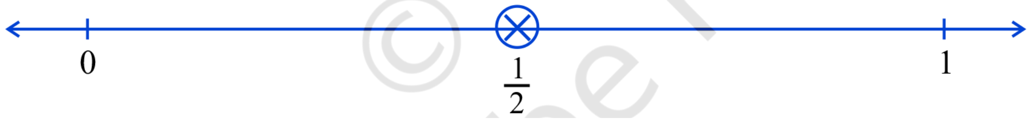


11. क्रिस्तिना स्वजन्मदिने एकां सान्द्रदर्शनीं स्वीकरोति । सा तदारभ्य सान्द्रमुद्रिकाः एकत्रितां कर्तुं प्रारब्धवती । सा 3 सान्द्रमुद्रिकाः क्रीणाति तथा 5 सान्द्रमुद्रिकाः उपायनरूपेण प्राप्नोति । तया क्रीणीतसान्द्रमुद्रिकायाः सङ्ख्या आहत्य सङ्ख्यायाः कतमं भिन्नम् अस्ति ?

7.3 सङ्ख्यारेखायां भिन्नः

भवन्तः एकस्यां सङ्ख्यारेखायां पूर्णसङ्ख्याः 0, 1, 2… दर्शयितुं शिक्षितवन्तः । किं भवन्तः भिन्नान् सङ्ख्यारेखायां दर्शयितुं शक्नुवन्ति ? आयान्तु एकां सङ्ख्यारेखाम् आलिखन्तु । किं वयं अस्याः उपरि अर्धं $\frac{1}{2}$ दर्शयितुं शक्नुमः ? वयं जानीमः यत् $\frac{1}{2}$ इति सङ्ख्या अधिकम् अस्ति तथैव 1 इत्यतः न्यूनम् अस्ति इति । अतः एतया 0 1 एतयोः मध्ये स्थातव्यम् भवति ।

यतः अस्माभिः $\frac{1}{2}$ दर्शनीयम् अस्ति अतः वयं 0 1 इत्येतयोः मध्ये विद्यमानं दूरं समानभागद्वये विभाजयामः । एकं भागं $\frac{1}{2}$ इत्यनेन दर्शयामः । यथा हि 7.5 इति आकृतौ दर्शितम् अस्ति ।



आकृतिः 7.5

सङ्ख्या-रेखायां $\frac{1}{3}$ इति दर्शयितुं 0 1 एतयोः मध्यस्तं दूरं कतिषु समानभागेषु विभजनं कर्तव्यं भवति ? वयं 0 1 इत्येतयोः मध्यस्थं दूरं 3 समानभागेषु विभाजनं कुर्मः । तथैव एकं भागं $\frac{1}{3}$ इत्यनेन दर्शयामः (यथा 7.5 आकृतौ दर्शितम् अस्ति)।

आकृतिः 7.6

किं वयम् अस्यां सङ्ख्या-रेखायां $\frac{2}{3}$ इत्येतां दर्शयितुं शक्नुमः ? $\frac{2}{3}$ इत्यस्य अर्थः 3 समानभागेषु 2 भागः, यथा 7.7 आकृतौ दर्शितम् अस्ति ।

आकृति 7.7

अनेन प्रकारेण भवन्तः $\frac{0}{3}$, $\frac{3}{3}$ सङ्ख्यारेखायां कथं दर्शयन्ति ?

$\frac{0}{3}$ बिन्दुः शून्यम् अस्ति। $\frac{3}{3}$ एकं पूर्णम् अस्ति। अतः इमां सङ्ख्यां सङ्ख्यारेखायाः उपरि बिन्दुना 1 इत्यनेन दर्शयामः (यथा 7.7 आकृतौ दर्शितम् अस्ति)।

अधुना यदि अस्माभिः $\frac{3}{7}$ इति दर्शनीयम् अस्ति तर्हि 0 1 एतयोः मध्यस्थं दूरत्वं कतिषु समानभागेषु विभाजयिष्यामः ? यदि P भिन्नः $\frac{3}{7}$ इत्यतः दर्शनीयम् अस्ति तर्हि 0, P अनयोः मध्ये आहत्य कति समानाः भागाः सन्ति ? $\frac{0}{7}$, $\frac{7}{7}$ कुत्र तिष्ठतः ?

प्रयत्नं कुर्वन्तु

1. सङ्ख्यारेखायां $\frac{3}{5}$ दर्शयन्तु।
2. सङ्ख्यारेखायां $\frac{1}{10}$, $\frac{0}{10}$, $\frac{5}{10}$, $\frac{10}{10}$ दर्शयन्तु।
3. किं भवन्तः 0 1 अनयोः मध्ये कमपि अन्यं भिन्नं दर्शयितुं शक्नुवन्ति ? एतादृशपञ्च-स्थितीः लिखन्तु याः भवन्तः दर्शयितुं शक्नुवन्ति। ताः सङ्ख्यारेखायाः उपरि दर्शयन्तु।
4. 0 1 अनयोः मध्ये कति भिन्नाः स्थिताः सन्ति ? चिन्तयन्तु, चर्चां कुर्वन्तु स्व-उत्तरं लिखन्तु।

7.4 उचितः भिन्नः

अधुना भवन्तः शिक्षितवन्तः यत् भिन्नान् सङ्ख्यारेखायां केन प्रकारेण दर्शयन्ति इति।

पृथक् पृथक् सङ्ख्यारेखायां भिन्नानां $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{9}{10}$, $\frac{0}{3}$, $\frac{5}{8}$ एतेषां स्थितिं दर्शयन्तु।

किम् एतेषु कोऽपि भिन्नः 1 इत्यतः दक्षिणतः अस्ति ? एते सर्वेऽपि भिन्नाः 1 इत्यतः वामभागे स्थिताः सन्ति, यतः 1 इत्यतः लघुसङ्ख्याः सन्ति।

वस्तुतः तु एतावत् पर्यन्तं अस्माभिः पठितः भिन्नः 1 इत्यतः लघुः अस्ति। एषः तु उचितः भिन्नः अस्ति। यथा फरीदा उक्तवती (अनुच्छेदसङ्ख्या 7.1), उचितः भिन्नः सा सङ्ख्या अस्ति या एकस्य पूर्णस्य भागं निरूपयति। अत्र तु भाजकः इदं वदति यत् पूर्णः कियद्भिः समानभागैः विभाजितः इति, अंशः तु समानभागैः कियन्तः भागाः चिताः इति। अतः एकस्मिन् उचिते भिन्ने अंशः सदैव भाजकात् लघुः भवति।

प्रयत्नं कुर्वन्तु

1. एकम् उचितं भिन्नं लिखतु ।
   यस्य अंशः 5 भाजकः 7 अस्ति ।
   यस्य अंशः 9 भाजकः 5 अस्ति ।
   यस्य अंशभाजकयोः योगः 10 अस्ति । भवन्तः इत्थं कियद्भिन्नान् लेखितुं शक्नुवन्ति ?
   यस्य भाजकः, अंशात् 4 अधिकः अस्ति ।
   (काञ्चन पञ्च भिन्नान् निर्मान्तु । भवन्तः इतोऽपि कति भिन्नान् निर्मातुं शक्नुवन्ति ?)
2. एकः भिन्नः दत्तः अस्ति । अमुं द्रष्ट्वा भवन्तः कथं वक्तुं प्रभवन्ति यत् एषः भिन्नः
   (a) 1 तः लघुः अस्ति ?   (b) 1 इत्यनेन समानः अस्ति ?
3. सङ्केतानाम् '>', '<' अथवा '=' एतेषां प्रयोगपुरस्सरं रिक्तस्थानं पूरयन्तु ।

   (a) $\frac{1}{2}$ □ 1   (b) $\frac{3}{5}$ □ 1   (c) 1 □ $\frac{7}{8}$

   (d) $\frac{4}{4}$ □ 1   (e) $\frac{0}{6}$ □ 1   (f) $\frac{2005}{2005}$ □ 1

7.5 विषमः भिन्नः तथा मिश्रितः भिन्नः

अनघा, रविः, रेश्मा जानः इत्येते चत्वारः स्वभोजनं विभाज्य खादितवन्तः । ते तैः सह पञ्चसेवफलमपि आनीतवन्तः आसन् । भोजनान्ते सर्वे सुहृदः सेवफलं खादितुम् इच्छन्ति स्म । ते चत्वारः अपि तान् पञ्चसेवफलान् केन प्रकारेण विभाजयितुं शक्नुवन्ति ?

अनघा उक्तवती यत् आयान्तु वयं सर्वेऽपि एकं पूर्णं सेवफलं स्वीकुर्मः । पञ्चमस्य सेवफलस्य च चतुर्थांशं स्वीकुर्मः ।

अनघा   रविः   रेश्मा   जानः

रेश्मा उक्तवती यत् इदं सम्यक् अस्ति, किन्तु वयं प्रत्येकं सेवफलं चतुर्भिः समानभागैः विभाजनं कर्तुं शक्नुमः प्रत्येकं सेवफलस्य चतुर्थांशं स्वीकुर्मः इति ।

अनघा   रविः   रेश्मा   जानः

रविः उक्तवान्, विभाजनस्य प्रत्येकं विधिना प्रत्येकं जनाय समानभागः लभ्यते तथा च सः अस्ति 5 चतुर्थांशः। यतः 4 चतुर्थांशेन एकः पूर्णः भवति। अतः वयं वक्तुं प्रभवामः यत् अस्मासु प्रत्येकं जनाय एकः पूर्णः एवम् एकः चतुर्थांशः लभ्यते। प्रत्येकं भागः चतुर्भिः विभाजितः पञ्च भवति। किम् इदं 5÷4 इति लिखामः ? जानः उक्तवान्, " आम्, इदं $\frac{5}{4}$ इति अपि लेखितुं शक्यते" इति । अनघा उक्तवती $\frac{5}{4}$ इत्यत्र अंशः भाजकात् बृहदस्ति। ते भिन्नाः येषु अंशः भाजकात् बृहत्तराः भवन्ति ते विषमभिन्नाः इति उच्यन्ते।

इत्थं $\frac{3}{2}$, $\frac{12}{7}$, $\frac{18}{5}$ प्रत्येकं एकः विषमः भिन्नः अस्ति।

1. पञ्च विषमभिन्नान् लिखन्तु येषां भाजकः पञ्च भवति।
2. पञ्चविषमभिन्नान् लिखन्तु यस्य अंशः 11 अस्ति।

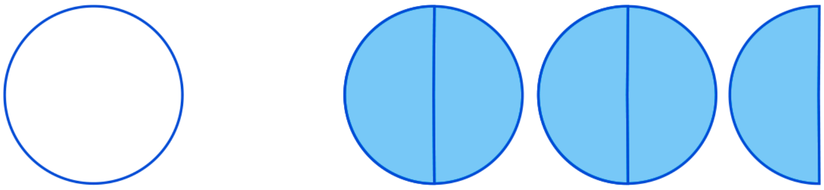
रविः जानं पृष्ठवान् "अमुं भागं लेखितुं अन्ये विधयः के सन्ति ? किं एषः 5 सेवफलानि अनघया विभजितविधिना प्राप्तः भवति ?

एतत् 1 अस्ति एतेषु प्रत्येकं $\frac{1}{4}$ अस्ति

आकृतिः 7.8

जानः उक्तवान्, "आम्, वस्तुतः एषः अनघायाः विधिना प्राप्तः भवति। तस्याः विधौ प्रत्येकं भागः एकेन पूर्णेन एवम् एकेन चतुर्थांशेन मिलित्वा निर्मितः अस्ति। एषः $1 + \frac{1}{4}$ अस्ति यः $1\frac{1}{4}$ इत्यपि लिख्यते। स्मरणे स्थापयन्तु $1, \frac{1}{4}$ $\frac{5}{4}$ एतत् द्वयमपि समानम्। (आकृतिः 7.8)

स्मरन्तु यत् फरीदा कति पूरिकाः खादितवती आसीत्। सा $2\frac{1}{2}$ पूरिकाः खादितवती आसीत्। (आकृतिः 7.9)



एतत् 1 अस्ति $2\frac{1}{2}$

आकृतिः 7.9

$2\frac{1}{2}$ इत्यस्मिन् कति अर्धभागाः छायाङ्किताः सन्ति ? अत्र तु 5 भागाः छायाङ्किताः सन्ति।

अतः एषः भिन्नः $\frac{5}{2}$ अस्ति। स्पष्टमस्ति यत्

एषः $\frac{5}{4}$ नास्ति इति।

$1\frac{1}{4}$ $2\frac{1}{2}$ एतादृशभिन्नाः, **मिश्रितभिन्नाः** इति कथ्यन्ते।

एकस्मिन् मिश्रितभिन्ने एकः भागः पूर्णः भवति तथा एकः भागः भिन्नः भवति।

भवतां कृते मिश्रितसङ्ख्याः कुत्र कुत्र लभ्यन्ते ? कानिचन उदाहरणानि ददतु।

उदाहरणम् 1 : अधोलिखितान् मिश्रितसङ्ख्यानां रूपेण व्यक्तीकुर्वन्तु।

(a) $\frac{17}{4}$ (b) $\frac{11}{3}$ (c) $\frac{27}{5}$ (d) $\frac{7}{3}$

समाधानम् : (a) $\frac{17}{4}$

$$\begin{array}{r|l} & 4 \\ 4 & 17 \\ & -16 \\ \hline & 1 \end{array}$$

अर्थात्, 4 पूर्णः $\frac{1}{4}$ अधिकः अथवा $4\frac{1}{4}$

(b) $\frac{11}{3}$

$$\begin{array}{r|l} & 3 \\ 3 & 11 \\ & -9 \\ \hline & 2 \end{array}$$

अर्थात्, 3 पूर्णः $\frac{2}{3}$ अधिकः अथवा $3\frac{2}{3}$

[विकल्पेन तु, $\frac{11}{3} = \frac{9+2}{3} = \frac{9}{3} + \frac{2}{3} = 3 + \frac{2}{3} = 3\frac{2}{3}$]

(c), (d) एतयोः उपरि उक्तयोः द्वयोः अपि विध्योः कर्तुं प्रयत्नं कुर्वन्तु।

इत्थं वयं एकं विषमभिन्नम् एकेन मिश्रितसङ्ख्यारूपेण व्यक्तीकर्तुं शक्नुमः। एतदर्थं वयम् अंशं भाजकेन भागं कृत्वा भागफलं तथा शेषफलं प्राप्नुमः। अनन्तरं मिश्रितसङ्ख्यां $\left[\text{भागफलम्} \ \frac{\text{शेषफलम्}}{\text{भाजकः}}\right]$ इति रूपेण लिखामः।

उदाहरणम् 2 : अधोलिखितमिश्रितभिन्नान् विषमभिन्नानां रूपेण व्यक्तीकुर्वन्तु।

(a) $2\frac{3}{4}$ (b) $7\frac{1}{9}$ (c) $5\frac{3}{7}$

समाधानम् : (a) $2\frac{3}{4} = \frac{(2 \times 4) + 3}{4} = \frac{11}{4}$

(b) $7\frac{1}{9} = \frac{(7 \times 9) + 1}{9} = \frac{64}{9}$

(c) $5\frac{3}{7} = \frac{(5 \times 7) + 3}{7} = \frac{38}{7}$

अनेन प्रकारेण वयम् एकं मिश्रितभिन्नं विषमभिन्नरूपेण व्यक्तीकर्तुं शक्नुमः । एतदर्थं वयं पूर्णं भाजकेन गुणनं कृत्वा गुणनफलेन सह अंशं योजयामः । अतः

$$\text{विषमभिन्नः} = \frac{\text{पूर्णः} \times \text{भाजकः} + \text{अंशः}}{\text{भाजकः}}$$ इति भवति ।

अभ्यासः 7.2

1. सङ्ख्यारेखाः आलिखन्तु । तासाम् उपरि अधोलिखितान् भिन्नान् बिन्दुरूपेण दर्शयन्तु ।

   (a) $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{4}{4}$ (b) $\frac{1}{8}, \frac{2}{8}, \frac{3}{8}, \frac{4}{8}$ (c) $\frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{8}{5}, \frac{4}{5}$

2. अधोलिखितान् मिश्रितभिन्नरूपेण व्यक्तीकुर्वन्तु ।

   (a) $\frac{20}{3}$ (b) $\frac{11}{5}$ (c) $\frac{17}{7}$

   (d) $\frac{28}{5}$ (e) $\frac{19}{6}$ (f) $\frac{35}{9}$

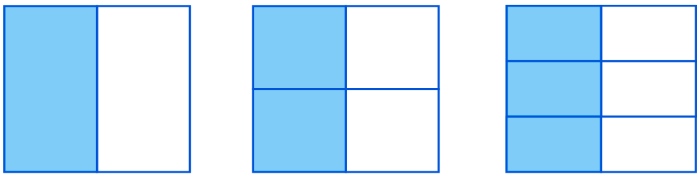
3. अधोलिखितान् विषमभिन्नानां रूपेण व्यक्तीकुर्वन्तु ।

   (a) $7\frac{3}{4}$ (b) $5\frac{6}{7}$ (c) $2\frac{5}{7}$

   (d) $10\frac{3}{5}$ (e) $9\frac{3}{7}$ (f) $8\frac{4}{9}$

7.6 तुल्यभिन्नः

भिन्नानाम् अधोलिखितान् निरूपणान् पश्यन्तु (आकृतिः 7.10) ।

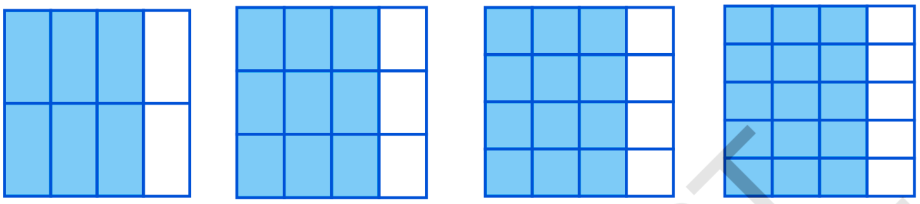


आकृतिः 7.10

एते भिन्नाः $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{6}$ सन्ति । ये पूर्ण-भागेभ्यः स्वीकृतभागान् दर्शयति । यदि वयम् एतेषां भिन्नान्नां चित्रीय-निरूपणं एकं द्वितीयस्य उपरि स्थापयामः चेदपि समानाः भवन्ति । किं भवन्तः अनेन सम्मताः सन्ति ? एतादृशभिन्नाः **तुल्यभिन्नाः** इत्युच्यन्ते । एतादृशान् इतोऽपि त्रीन् भिन्नान् वदन्तु ये उपरि उक्ततुल्याः सन्ति ।

प्रयत्नं कुर्वन्तु

1. किं $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{7}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{2}{7}$, $\frac{2}{9}$, $\frac{6}{27}$ एते तुल्यभिन्नाः सन्ति ? कारणं ददतु ।
2. चतुरः तुल्यभिन्नानाम् एकम् अन्यम् उदाहरणं लिखन्तु
3. प्रत्येकं भिन्नं परिचिनोतु । किं एते भिन्नतुल्याः सन्ति ?



तुल्यभिन्नानाम् अवगमनम् ।

$\frac{1}{2}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{6}$,... $\frac{36}{72}$ एतेषु सर्वेऽपि तुल्यभिन्नाः सन्ति । एते एकस्य पूर्णस्य समानभागान् निरूपयन्ति ।

चिन्तयन्तु , चर्चां कुर्वन्तु लिखन्तु ।

तुल्यभिन्नाः एकस्य पूर्णस्य समानभागान् किमर्थं निरूपयन्ति ? वयम् एतेषु एकं भिन्नम् अन्यभिन्नेन कथं प्राप्तुं शक्नुमः ?

वयं पश्यामः यत् $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{1 \times 2}{2 \times 2}$ अस्ति ।

इत्थमेव, $\frac{1}{2} = \frac{3}{6} = \frac{1 \times 3}{2 \times 3}$ तथा

$\frac{1}{2} = \frac{4}{8} = \frac{1 \times 4}{2 \times 4}$ अस्ति ।

एकस्य दत्तभिन्नस्य तुल्यभिन्नं ज्ञातुं भवन्तः अंशम् भाजकम् एकया समानशून्येतर सङ्ख्यया गुणनं कर्तुं शक्नुवन्ति ।

रजनी वदति यत् $\frac{1}{3}$ इत्यस्य सन्ति -

$\frac{1 \times 2}{3 \times 2} = \frac{2}{6}$, $\frac{1 \times 3}{3 \times 3} = \frac{3}{9}$, $\frac{1 \times 4}{3 \times 4} = \frac{4}{12}$ इत्यादयः ।

किं भवन्तः रजन्याः वाक्ये सम्मताः सन्ति ? कृत्वा स्पष्टीकुर्वन्तु ।

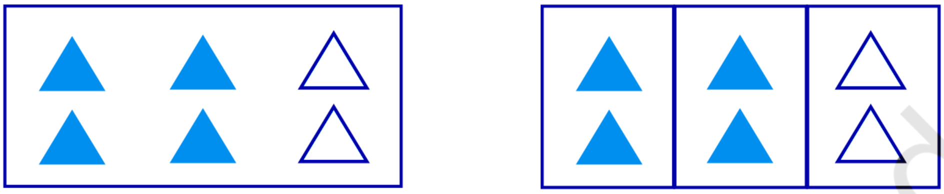
प्रयत्नं कुर्वन्तु

1. अधोलिखितेषु प्रत्येकं भिन्नस्य पञ्च तुल्यभिन्नान् जानन्तु।

(i) $\frac{2}{3}$ (ii) $\frac{1}{5}$ (iii) $\frac{3}{5}$ (iv) $\frac{5}{9}$

अन्ये विधयः

किं तुल्यं भिन्नं ज्ञातुं केऽपि अन्ये विधयः सन्ति ?(आकृतिः 7.11)



अत्र $\frac{4}{6}$ छायाङ्कितः अस्ति। अत्र $\frac{2}{3}$ छायाङ्कितः अस्ति।

आकृतिः 7.11

अत्र तु छायाङ्कितवस्तूनां सङ्ख्या समाना वर्तते , अर्थात् $\frac{4}{6}$ एवं च $\frac{2}{3}$ तुल्यभिन्नौ स्तः।

$$\frac{4}{6} = \frac{2}{3} = \frac{4 \div 6}{2 \div 2}$$

एकस्य दत्तभिन्नस्य तुल्यभिन्नं ज्ञातुं वयं तस्य भिन्नस्य अंशम् भाजकम् एकया समानशून्येतरसंख्यया भागं कर्तुं शक्नुमः।

$\frac{12}{15}$ इत्यस्य एकः तुल्यभिन्नः $\frac{12 \quad 3}{15 \quad 3} = \frac{4}{5}$

किं भवन्तः $\frac{9}{15}$ इत्यस्य एतादृशं तुल्यभिन्नं ज्ञातुं शक्नुमः यस्य भाजकः 5 अस्ति।

उदाहरणम् 3 : $\frac{2}{5}$ इत्यस्य एतादृशं तुल्यभिन्नं जानन्तु यस्य अंशः 6 अस्ति।

समाधानम् : वयं जानीमः यत् 2 x 3 = 6 अस्ति। अस्य अर्थः अस्ति तुल्यभिन्नं प्राप्तुम् अस्माभिः दत्तभिन्नस्य अंशं भाजकं 3 इत्यनेन गुणनं कर्तव्यं भवति। इत्थम् ,

$\frac{2}{5} = \frac{2 \text{ x } 3}{5 \text{ x } 3} = \frac{6}{15}$ अस्ति।

अतः वाञ्छितः तुल्यभिन्नः $\frac{6}{15}$ अस्ति।

किं भवन्तः इदं चित्रीयरूपेण दर्शयितुं शक्नुवन्ति ?

उदाहरणम् 4 : $\frac{15}{35}$ इत्यस्य एतादृशं तुल्यभिन्नं जानन्तु यस्य अंशः 7 अस्ति।

समाधानम् : अस्माभिः प्राप्तः अस्ति : $\frac{15}{35} = \frac{\square}{7}$

वयं भाजकान् पश्यामः। यतः 35÷ 5 = 7 अस्ति , अतः वयं $\frac{15}{35}$ इत्यस्य अंशम् भाजकं द्वयम् अपि 5 इत्यतः भागं कुर्मः।

अस्माभिः प्राप्स्यते यत् $\frac{15}{35} = \frac{15 \quad 5}{35 \quad 5} = \frac{3}{7}$

एकं रुचिकरं तथ्यम् :

तुल्यभिन्नानां विषये एकं तथ्यं रुचिकरम् अस्ति। दत्तसारिणीं पूर्णं कुर्वन्तु प्रथमपङ्क्तिद्वयं पूर्णं कृतमस्ति।

तुल्यभिन्नः	प्रथमस्य अंशः द्वितीयस्य भाजकः एतयोः गुणनफलम्	द्वितीयस्य अंशः प्रथमस्य भाजकः एतयोः गुणनफलम्	किं गुणनफलम् समानम् अस्ति।
$\frac{1}{3} = \frac{3}{9}$	1 x 9 =9	3 x 3= 9	अस्ति
$\frac{4}{5} = \frac{28}{35}$	4 x 35 = 140	5 x 28 = 140	अस्ति
$\frac{1}{4} = \frac{4}{16}$			
$\frac{2}{3} = \frac{10}{15}$			
$\frac{3}{7} = \frac{24}{56}$			

उपरि उक्तसारिण्या वयं कं निष्कर्षं प्राप्नुमः ? एतेषु सर्वेषु प्रथमस्य अंशस्य द्वितीयस्य भाजकस्य गुणनफलं द्वितीयस्य अंशस्य प्रथमस्य भाजकस्य गुणनफलेन समानम् अस्ति। एते द्वे अपि गुणनफले सदिशगुणनफले इत्युच्येते। तुल्यभिन्नानाम् अन्ययुग्मानां प्रति अपि सदिशगुणनफलं जानन्तु। किं भवन्तः तुल्यभिन्नानां तादृशयुग्मान् प्राप्तुं शक्नुवन्ति, येषु सदिशगुणनफलं समानं नास्ति ? अनेन नियमेन यदा कदापि तुल्यभिन्नानाम् अवगमनाय साहाय्यं लभ्यते।

उदाहरणम् 5 : $\frac{2}{9}$ इत्यस्य एतादृशं तुल्यभिन्नं जानन्तु यस्य भाजकः 63 अस्ति।

समाधानम् : वयं प्राप्नुमः। $\frac{2}{9} = \frac{\square}{63}$

एतदर्थं , 9 x $\square$ = 2 x 63 भवेत्।

परन्तु 63 = 7 x 9 अस्ति । अतः 9 x □ = 2 x 7 x 9

= 14 x 9 = 9 x 14

अथवा 9 x □ = 9 x 14 अभवत् ।

अतः, तोलनेन □ = 14 अतः, $\frac{2}{9} = \frac{14}{63}$ अस्ति ।

7.7 भिन्नस्य सरलतमरूपम्

एकः भिन्नः $\frac{36}{54}$ दत्तः अस्ति । आयान्तु अस्य तादृशम् एकं तुल्यभिन्नं प्राप्तुं प्रयत्नं कुर्मः यस्य अंशे भाजके 1 इति सङ्ख्याम् अतिरिच्य कोऽपि उभयनिष्ठः गुणनखण्डः न स्यात् ।

अतः, $\frac{36}{54} = \frac{36 \div 2}{54 \div 2} = \frac{18}{27}$

वयं कथं कर्तुं शक्नुमः ? वयं जानीमः यत् 36 54 , 2 संख्यया विभाज्यौ स्तः ।

परन्तु 18 27 एतयोः अपि 1 इति सङ्ख्याम् अतिरिच्य उभयनिष्ठः गुणनखण्डः अस्ति । ते 1, 3, 9 सन्ति ।

अतः, $\frac{18}{27} = \frac{18 \div 9}{27 \div 9} = \frac{2}{3}$

यतः 2 3 एतयोः 1 इति सङ्ख्याम् अतिरिच्य कोऽपि उभयनिष्ठः गुणनखण्डः नास्ति । अतः वाञ्छितभिन्नः $\frac{2}{3}$ अस्ति । **एतादृशः भिन्नः सरलतमरूपभिन्नः इत्युच्यते ।**

इत्थम्, एकः भिन्नः सरलतमरूपेण अथवा लघुतमरूपेण तदा उच्यते यदा तस्य अंशे हरे च 1 इति सङ्ख्याम् अतिरिच्य कोऽपि उभयनिष्ठः गुणनखण्डः न स्यात् ।

लघुतमः मार्गः :

सरलतमरूपेण तुल्यभिन्नान् ज्ञातुं सर्वस्मात् लघुमार्गः एषः अस्ति यत् दत्तभिन्नस्य अंशस्य भाजकस्य म.सा.अ. ज्ञात्वा अंशं भाजकं च ज्ञात-म.सा.अ. इत्यतः भागः कर्तव्यः । इत्थं सरलतमरूपेण तुल्यभिन्नस्य प्राप्तिः भवति ।

एका क्रीडा

अत्र दत्तसमतुल्यभिन्नः बहुरुचिकरम् अस्ति । प्रत्येकं सङ्क्रियायां 1 तः 9 पर्यन्तं सर्वे अङ्काः एकवारं प्रयुक्ताः सन्ति ।

$\frac{2}{6} = \frac{3}{9} = \frac{58}{174}$

$\frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{79}{158}$

किं भवन्तः एतादृशौ इतोऽपि द्वौ समतुल्यभिन्नौ ज्ञातुं शक्नुमः ।

भिन्नं $\frac{36}{24}$ स्वीकुर्वन्तु।

36 24 एतयोः म.सा.अ. 12 अस्ति।

अतः, $\frac{36 \div 12}{24 \div 12} = \frac{3}{2}$

इत्थं, म.सा.अ. इत्यस्य अवधारणा एकं भिन्नं लघुतमरूपेण परिवर्तयितुम् अस्माकं साहाय्यं करोति।

प्रयत्नं कुर्वन्तु

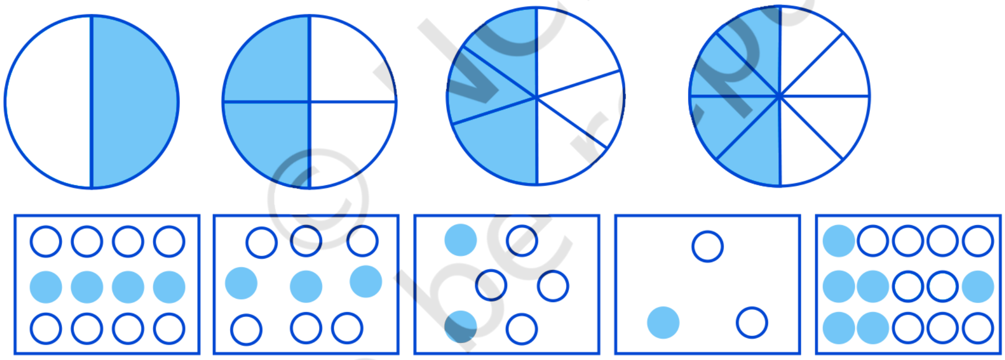
1. अधोलिखितान् सरलतमरूपेण लिखन्तु।

   (i) $\frac{15}{75}$ (ii) $\frac{16}{72}$ (iii) $\frac{17}{51}$ (iv) $\frac{42}{28}$ (v) $\frac{80}{24}$

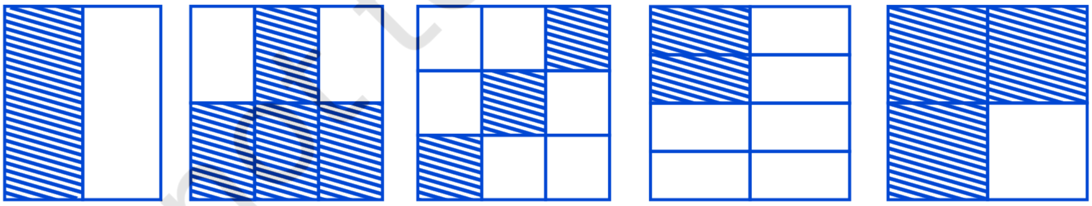
2 किं 49/64 स्व-सरलतमरूपेण अस्ति ?

अभ्यासः 7.3

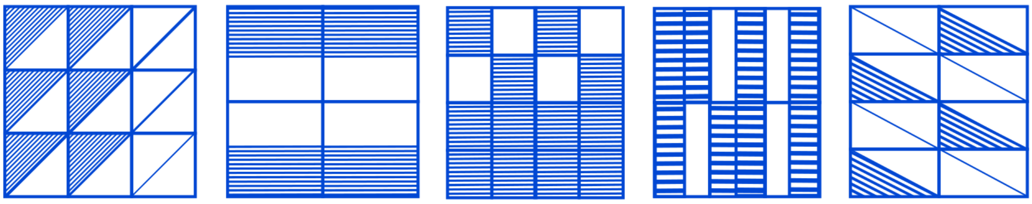
1. प्रत्येकं चित्रे छायाङ्कित-भागानां कृते भिन्नान् लिखन्तु। किम् एते सर्वे भिन्नाः समानाः सन्ति ?



2. छायाङ्कितानां भागानां कृते भिन्नान् लिखन्तु। प्रत्येकं पङ्क्तौ तुल्यभिन्नान् परिचिन्वन्तु।



(a) (b) (c) (d) (e)



(i) (ii) (iii) (iv) (v)

3. रिक्तस्थानं पूरयन्तु।

(a) $\frac{2}{7} = \frac{8}{\square}$ (b) $\frac{5}{8} = \frac{10}{\square}$ (c) $\frac{3}{5} = \frac{\square}{20}$

(d) $\frac{45}{60} = \frac{15}{\square}$ (e) $\frac{18}{24} = \frac{\square}{4}$

4. $\frac{3}{5}$ इत्यस्य तं भिन्नं जानन्तु यस्य –

(a) भाजकः 20 अस्ति। (b) अंशः 9 अस्ति।

(c) भाजकः 30 अस्ति। (d) अंशः 27 अस्ति।

5. $\frac{36}{48}$ इत्यस्य तादृशं तुल्यभिन्नं जानन्तु यस्य

(a) अंशः 9 अस्ति। (b) भाजकः 4 अस्ति ।

6. परीक्षणं कुर्वन्तु यत् अधोलिखिताः भिन्नाः सन्ति अथवा न इति।

(a) $\frac{5}{9}, \frac{30}{54}$ (b) $\frac{3}{10}, \frac{12}{50}$ (c) $\frac{7}{13}, \frac{5}{11}$

7. अधोलिखितभिन्नान् तेषां सरलतमरूपेण परिवर्तयन्तु।

(a) $\frac{48}{60}$ (b) $\frac{150}{60}$ (c) $\frac{84}{98}$

(d) $\frac{12}{52}$ (e) $\frac{7}{28}$

8. रमेशस्य समीपे 20 अङ्कन्यः आसन्। शीलोः समीपे 50 अङ्कन्यः जमालस्य समीपे 80 अङ्कन्यः आसन्। 4 मासानन्तरं रमेशः 10 अङ्कनीः शीलूः 25 अङ्कनीः प्रयुक्तवन्तः। जमालः 40 अङ्कनीः प्रयुक्तवान्। प्रत्येकं जनाः स्व-अङ्कनीनां कतमस्य भिन्नस्य प्रयोगं कृतवन्तः ? परीक्षणं कुर्वन्तु यत् प्रत्येकं जनः स्व-अङ्कनीनां समानभिन्नस्य प्रयोगं वा इति।

9. तुल्यभिन्नानां मेलनं कुर्वन्तु तथा प्रत्येकं कृते इतोऽपि भिन्नद्वयं लिखन्तु।

(i) $\frac{250}{400}$	(a) $\frac{2}{3}$
(ii) $\frac{180}{200}$	(b) $\frac{2}{5}$
(iii) $\frac{660}{990}$	(c) $\frac{1}{2}$
(iv) $\frac{180}{360}$	(d) $\frac{5}{8}$
(v) $\frac{220}{550}$	(e) $\frac{9}{10}$

7.8 समानः भिन्नः

समानभाजकयुक्तः भिन्नः समानभिन्नः इत्युच्यते ।

इत्थं , $\frac{1}{15}$, $\frac{2}{15}$, $\frac{3}{15}$, $\frac{8}{15}$ सर्वे समानभिन्नाः सन्ति ।

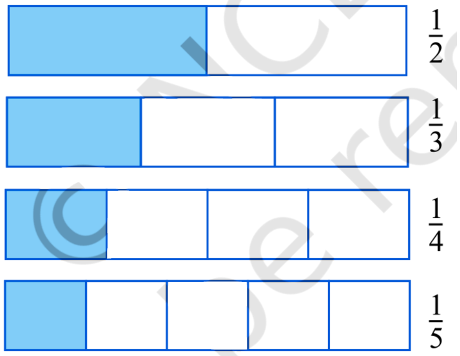
किं $\frac{7}{27}$, $\frac{7}{28}$ द्वौ समानभिन्नौ स्तः ? अस्य भाजकः भिन्नः अस्ति। अतः एतौ समानभिन्नौ न स्तः। एतयोः **नाम अस्ति। असमानभिन्नः** इति।

समानभिन्नानां पञ्चयुग्मान् एवम् असमानभिन्नानां पञ्चयुग्मान् लिखन्तु।

7.9 भिन्नानां तुलना

सोहन्याः स्थालिकायां $3\frac{1}{2}$ रोटिकाः सन्ति। रीतायाः स्थालिकायां $2\frac{2}{4}$ रोटिकाः सन्ति। कस्याः स्थालिकायाम् अधिकाः रोटिकाः सन्ति ? स्पष्टम् अस्ति यत् सोहन्याः समीपे 3 इत्यतः अधिकाः रोटिकाः सन्ति।

अधुना 7.12 आकृतौ दर्शितभिन्नयोः $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ इत्येतयोः उपरि विचारं कुर्वन्तु। पूर्णस्य $\frac{1}{2}$ अस्य सहभागः तस्यैव पूर्णस्य $\frac{1}{3}$ अस्य सहभागेन स्पष्टतया बृहत्तरः अस्ति। अतः, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ इत्यस्मात् बृहद् अस्ति।



आकृति 7.12

किन्तु प्रायः भिन्नेषु इदं वक्तुं एत्तावत् सरलं न भवति यत् एतेषु कतमः भिन्नः बृहद् अस्ति इति। उदाहरणार्थं, $\frac{1}{4}$ बृहदस्ति ?अथवा $\frac{1}{5}$ बृहदस्ति ? एतदर्थं वयं भिन्नान् आकृतिभिः दर्शयितुं चिन्तयामः (यथा आकृतिः 7.12)। परं तु आकृतीनां निर्माणं तावत् सरलं न। विशेषेण यदा भाजकः 13 सदृशं स्यात् । अतः अस्माभिः भिन्नानां तोलनं कर्तुं कोऽपि क्रमबद्धः विधिः ज्ञातव्यः अस्ति। विशेषेण समानभिन्नानां तोलनं सरलम् अस्ति। एतदर्थं वयं प्रथमं समानभिन्नानाम् एव तुलनां कुर्मः।

प्रयत्नं कुर्वन्तु

1. भवन्तः फलरसस्य कूप्याः $\frac{1}{5}$ युक्तभागं प्राप्नुवन्तु तथैव भवतां भगिन्याः कृते तस्याः कूप्याः $\frac{1}{3}$ युक्तभागः लभ्यते। केन अधिकः फलरसः प्राप्यते ?

7.9.1 समानभिन्नानां तोलनम्

समानभाजकयुक्तः भिन्नः समानभिन्नः भवति। एतेषु कतमः भिन्नः समानभिन्नः अस्ति ?

$\frac{2}{5}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{7}{2}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{4}{7}$

आयान्तु, $\frac{3}{8}$, $\frac{5}{8}$ एतयोः द्वयोः समानभिन्नयोः तोलनं कुर्मः।

$\frac{3}{8}$

$\frac{5}{8}$

द्वयोः भिन्नयोः अपि पूर्णं 8 समानभागेषु विभाजनं कृतवन्तः। एतेषु 8 समानभागेषु वयं $\frac{3}{8}$ $\frac{5}{8}$ एतयोः कृते क्रमशः 3, 5 भागान् स्वीकुर्मः। स्पष्टमस्ति यत् 5 भागानां सहभागः 3 भागानां सहभागादपि अधिकः अस्ति। अतः $\frac{5}{8} > \frac{3}{8}$ अस्ति। अवधानं ददतु यत् स्वीकृतभागः अंशेन प्राप्तः अस्ति। अतः एतत् तु स्पष्टमस्ति यत् समानभाजकयुक्तयोः द्वयोः भिन्नयोः कृते बृहत्-अंशयुक्तः भिन्नः बृहत्-भवति। $\frac{4}{5}$ $\frac{3}{5}$ एतयोः मध्ये $\frac{4}{5}$ बृहत्-भिन्नः अस्ति। $\frac{11}{20}$ $\frac{13}{20}$ एतयोः मध्ये $\frac{13}{20}$ बृहदस्ति इत्यादयः।

प्रयत्नं कुर्वन्तु

1. कतमः भिन्नः बृहत्तरः ?

   (i) $\frac{7}{10}$ अथवा $\frac{8}{10}$ (ii) $\frac{11}{24}$ अथवा $\frac{13}{24}$ (iii) $\frac{17}{102}$ अथवा $\frac{12}{102}$

एतादृशभिन्नानां परस्परं तुलना किमर्थं सरला अस्ति ?

2. अधोलिखितान् आरोहणक्रमे लिखन्तु।

   (a) $\frac{1}{8}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{5}{8}$

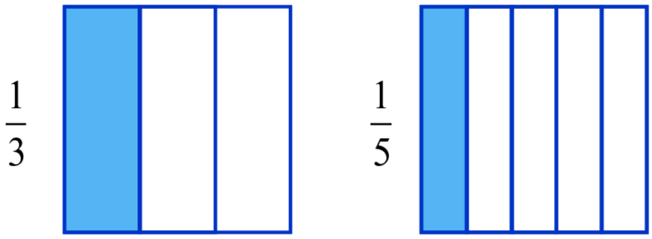
   (b) $\frac{1}{5}$, $\frac{11}{5}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{7}{5}$

   (c) $\frac{1}{7}$, $\frac{3}{7}$, $\frac{13}{7}$, $\frac{11}{7}$, $\frac{7}{7}$

7.9.2 असमानभिन्नानां तोलनम्

द्वौ भिन्नौ असमानौ भवतः, यदि तयोः भाजकौ अपि भिन्नौ स्तः। उदाहरणार्थं $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{5}$ असमानभिन्नौ स्तः। $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{5}$ एतौ अपि असमानभिन्नौ स्तः।

समानांशसहितः असमानभिन्नः



असमानभिन्नयोः $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{5}$ एतयोः एकं युग्मं स्वीकृत्य विचारं कुर्वन्तु, ययोः अंशः समानः अस्ति।

$\frac{1}{3}$ बृहत्तरः अस्ति ? अथवा $\frac{1}{5}$ बृहत्तरः अस्ति ।

$\frac{1}{3}$ इत्यस्य कृते वयम् एकं पूर्णं, 3 समानभागैः विभाजयामः तेषु एकं भागं स्वीकुर्मः। अवधानं यच्छन्तु यत् $\frac{1}{3}$ इत्यत्र पूर्णं, $\frac{1}{5}$ इत्यस्य तुलनापेक्षया न्यूनभागेषु विभाजनं कृतम् अस्ति। अतः $\frac{1}{3}$ इत्यत्र प्राप्तः समानभागः, $\frac{1}{5}$ इत्यत्र प्राप्तात् समानभागात् अपि बृहत्तरः अस्ति। यतो हि द्वयोः अपि स्थित्योः वयम् एकमेव भागं स्वीकुर्वन्तः स्मः इत्यतः पूर्णस्य $\frac{1}{3}$ बोधकः भागः तस्य $\frac{1}{5}$ भागं दर्श्यमानभागात् अपि अधिकतरः अस्ति। अतः $\frac{1}{3} > \frac{1}{5}$ अस्ति।

इत्थं वयं वक्तुं शक्नुमः यत् $\frac{2}{3} > \frac{2}{5}$ अस्ति। अस्मिन् सन्दर्भे स्थितिः यथापूर्वम् अस्ति, केवलम् इदमेव अन्तरम् अस्ति यत् अंशः 1 नास्ति 2 अस्ति। पूर्णस्य $\frac{2}{5}$ कृते $\frac{2}{3}$ तुलनायाम् अधिकसमानभागेषु समानतया विभाजनं कृतम् अस्ति। अतः $\frac{2}{3}$ इत्यस्य स्थितियुक्तः प्रत्येकं समानभागः $\frac{2}{5}$ इत्यस्य स्थितियुक्तात् समानभागादपि बृहदस्ति। अधुना वयं तु समानभागानां समानसङ्ख्यां स्वीकुर्वन्तः स्मः (यतो हि अंशः समानः अस्ति)। अतः पूर्णस्य $\frac{2}{3}$ दर्शमानः भागः तस्य $\frac{2}{5}$ दर्श्यमानभागात् बृहत्तरः अस्ति। अतः $\frac{2}{3} > \frac{2}{5}$ अस्ति।

उपरि उक्त-उदाहरणैः वयं द्रष्टुं शक्नुमः यत् यदि द्वयोः भिन्नयोः अंशः समानः अस्ति तर्हि द्वयोः भिन्नयोः मध्ये लघु-भाजकयुक्तः भिन्नः बृहत्तरः भवति।

इत्थम्.. $\frac{1}{8} > \frac{1}{10}$, $\frac{3}{5} > \frac{3}{7}$, $\frac{4}{9} > \frac{4}{11}$ इत्यादयः।

आयान्तु $\frac{2}{1}$, $\frac{2}{13}$, $\frac{2}{9}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{2}{7}$ इत्येतान् आरोहणक्रमे लिखामः। सर्वे भिन्नाः असमानाः सन्ति किन्तु एतेषाम् अंशाः समानाः सन्ति। अतः भाजकः यावान् बृहद्भवति भिन्नः अपि

तावान् लघु-भवति। लघुतमः भिन्नः $\frac{2}{13}$ अस्ति यतो हि अस्य भाजकः बृहत्तमः अस्ति । बृहत्तमः भिन्नः $\frac{2}{1}$ अस्ति (अस्य लघुतमः भाजकः अस्ति।)। अवरोहणक्रमे भिन्नाः लिख्यन्ते $\frac{2}{13}$, $\frac{2}{9}$, $\frac{2}{7}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{2}{1}$ ।

प्रयत्नं कुर्वन्तु

1. अधोलिखितान् भिन्नान् आरोहणक्रम-अवरोहणक्रमयोः व्यवस्थितान् कुर्वन्तु।

   (a) $\frac{1}{12}, \frac{1}{23}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{50}, \frac{1}{9}, \frac{1}{17}$

   (b) $\frac{3}{7}, \frac{3}{11}, \frac{3}{5}, \frac{3}{2}, \frac{3}{13}, \frac{3}{4}, \frac{3}{17}$

   (c) उपरि उक्तप्रकारेण इतोऽपि त्रीणि उदाहरणानि लिखन्तु तथा तानि आरोहणक्रम-अवरोहणक्रमयोः व्यवस्थितानि कुर्वन्तु।

भावयन्तु, वयं द्वयोः असमानभिन्नयोः $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$ एतयोः तोलनं कर्तुम् इच्छामः। इदं तु तदा एव संभवः भवति, यदा वयं द्वयोः अपि भिन्नयोः भाजकानां भागं केनापि प्रकारेण समानं कुर्मः, अर्थात् तयोः भाजकौ समानौ कुर्मः। एकवारं यदि कुर्मः तर्हि समानभिन्नः प्राप्तः भवति। तस्य अंशानां समानभागानां तुलनां कृत्वा भिन्नानां तुलनां सरलतया कर्तुं शक्नुमः।

आयान्तु, पुनः $\frac{2}{3}$ $\frac{3}{4}$ स्वीकुर्मः तथा च अनयोः तुल्यभिन्नान् जानीमः।

अधुना, $\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{6}{9} = \frac{8}{12} = \frac{10}{15} = ...$

इत्थम्, $\frac{3}{4} = \frac{6}{8} = \frac{9}{12} = \frac{12}{16} = ...$

$\frac{2}{3}$ $\frac{3}{4}$ इत्यत्र समानभाजकः 12 इत्यनेन सहितः तुल्यभिन्नः क्रमशः $\frac{8}{12}$ $\frac{9}{12}$ अस्ति।

अर्थात् $\frac{2}{3} = \frac{8}{12}$ अस्ति तथा $\frac{3}{4} = \frac{9}{12}$ अस्ति।

यतो हि $\frac{9}{12} > \frac{8}{12}$ अस्ति अतः, $\frac{3}{4} > \frac{2}{3}$ अस्ति।

उदाहरणम् 6 : $\frac{4}{5}$ $\frac{5}{6}$ अनयोः तुलनां कुर्वन्तु।

समाधानम् : एतौ असमानभिन्नौ स्तः। अनयोः अंशौ अपि भिन्नौ स्तः। आयान्तु, अनयोः तुल्यभिन्नान् लिखामः।

$\frac{4}{5} = \frac{8}{10} = \frac{12}{15} = \frac{16}{20} = \frac{20}{25} = \frac{24}{30} = \frac{28}{35}$ =L

$$\frac{5}{6} = \frac{10}{12} = \frac{15}{18} = \frac{20}{24} = \frac{25}{30} = \frac{30}{36} = L$$

$$\frac{4}{5} = \frac{24}{30} \qquad \frac{5}{6} = \frac{25}{30}$$

अतः $\frac{25}{30} > \frac{24}{30}$ अस्ति यतो हि $\frac{5}{6} > \frac{4}{5}$ अस्ति। ध्यानं ददतु यत् तुल्यभिन्नानां समानभाजकः 30 अस्ति यः 5 x 6 इत्यनेन समानः अस्ति। एषः 5 6 अनयोः सामान्यगुणजः अस्ति।

अतः द्वयोः असमानभिन्नयोः तोलनसमये वयं प्रथमं तेषां भिन्नानां तादृशतुल्यभिन्नान् जानीमः येषु तेषां भाजकानां सामान्यगुणजः स्यात्।

उदाहरणम् 7 : $\frac{5}{6}$ $\frac{13}{15}$ अनयोः तोलनं कुर्वन्तु।

समाधानम् : एतौ असमानभिन्नौ स्तः। प्रथमं वयं 6 15 अनयोः सामान्यगुणजेन सहितौ तुन्यभिन्नौ जानीमः।

अधुना, $\frac{5 \times 5}{6 \times 5} = \frac{25}{30}$, $\frac{13 \times 2}{15 \times 2} = \frac{26}{30}$ अस्ति।

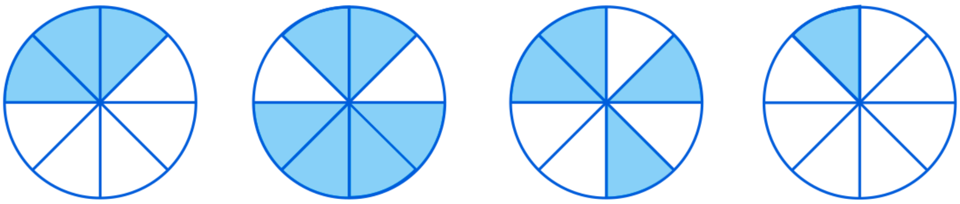
अतः $\frac{26}{30} > \frac{25}{30}$ अस्ति ,यतो हि $\frac{13}{15} > \frac{5}{6}$ अस्ति।

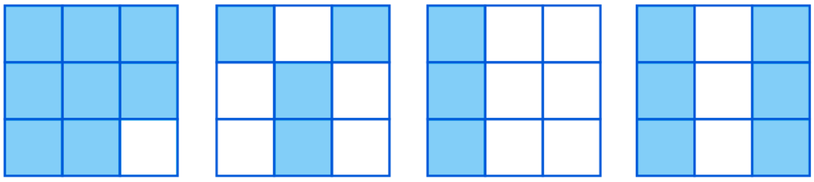
ल.सा.अ. किमर्थम् ?

6, 15 अनयोः गुणनफलं 90 अस्ति। स्पष्टतः 90, 6 15 अनयोः एकः समानगुणजः अस्ति। वयं 30 इत्यस्य स्थाने 90 अपि प्रयोगं कर्तुं शक्नुमः। अत्र कोऽपि दोषः नास्ति। परन्तु वयं जानीमः यत् लघुसङ्ख्याभिः कार्यं बहुसरलं तथा च साहाय्यकरं भवति। अतः वयं सामान्यगुणजं लघुतमम् एव स्वीकर्तुं इच्छामः। अतः समानभाजकं कर्तुं भाजकानां ल.सा.अ. इत्यस्य कृते प्राथमिकता दीयते।

अभ्यासः 7.4

1. प्रत्येकं चित्रस्य कृते भिन्नान् लिखन्तु। भिन्नानां मध्ये समुचितचिह्नस्य ‘<’ , ‘=’ , ‘>’ प्रयोगं कुर्वन्तः तान् आरोहण-अवरोहणक्रमेषु लिखन्तु।

(a) 

(b) 

(c) $\frac{2}{6}$, $\frac{4}{6}$, $\frac{8}{6}$, $\frac{6}{6}$ एतान् सङ्ख्यारेखायां दर्शयन्तु।

दत्तभिन्नयोः मध्ये उचितं चिह्नं "<" ">" स्थापयन्तु।

$\frac{5}{6}$ □ $\frac{2}{6}$, $\frac{3}{6}$ □ 0, $\frac{1}{6}$ □ $\frac{6}{6}$, $\frac{8}{6}$ □ $\frac{5}{6}$

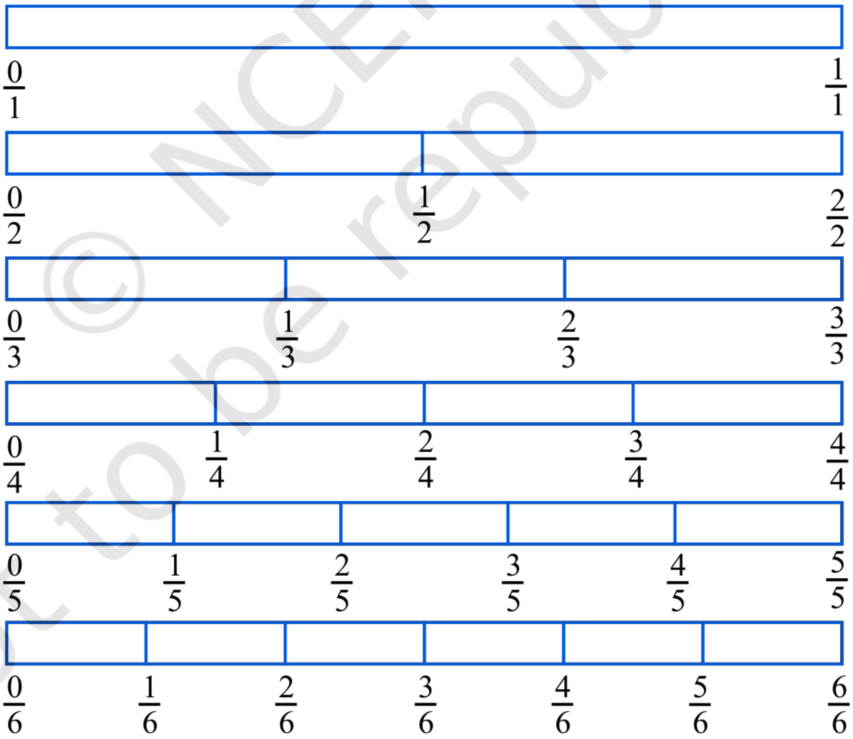
2. भिन्नानां तुलनां कुर्वन्तु समुचितं चिह्नं स्थापयन्तु।

(a) $\frac{3}{6}$ □ $\frac{5}{6}$ (b) $\frac{1}{7}$ □ $\frac{1}{4}$

(c) $\frac{4}{5}$ □ $\frac{5}{5}$ (d) $\frac{3}{5}$ □ $\frac{3}{7}$

3. एवमेव इतोऽपि पञ्चयुग्मान् स्वीकृत्य चिह्नं स्थापयन्तु।

4. अधोलिखिताः आकृतीः पश्यन्तु भिन्नानां मध्ये समुचितं चिह्नं '>', '=', '<' स्थापयन्तु।



(a) $\frac{1}{6}$ □ $\frac{1}{6}$ (b) $\frac{3}{4}$ □ $\frac{2}{6}$ (c) $\frac{2}{3}$ □ $\frac{2}{4}$

(d) $\frac{6}{6}$ □ $\frac{3}{3}$ (e) $\frac{5}{6}$ □ $\frac{5}{5}$

एवमेव इतोऽपि पञ्चप्रश्नान् निर्मान्तु तथा च स्व-मित्रैः सह तेषां समाधानं कुर्वन्तु।

5. पश्यामः कियता वेगेन भवन्तः कुर्वन्ति ? समुचितं चिह्नं पूरयन्तु : (<, = , >)

(a) $\frac{1}{2}\square\frac{1}{5}$ (b) $\frac{2}{4}\square\frac{3}{6}$ (c) $\frac{3}{5}\square\frac{2}{3}$

(d) $\frac{3}{4}\square\frac{2}{8}$ (e) $\frac{3}{5}\square\frac{6}{5}$ (f) $\frac{7}{9}\square\frac{3}{9}$

(g) $\frac{1}{4}\square\frac{2}{8}$ (h) $\frac{6}{10}\square\frac{4}{5}$ (i) $\frac{3}{4}\square\frac{7}{8}$

(j) $\frac{6}{10}\square\frac{4}{5}$ (k) $\frac{5}{7}\square\frac{15}{21}$

6. अधोलिखितभिन्नाः तिस्रः प्रत्येकं सङ्ख्याः निरूपयन्ति । एतान् सरलतमरूपेण परिवर्त्य तेषां त्रयाणां तुल्यभिन्नानां समूहरूपेण लिखन्तु ।

(a) $\frac{2}{12}$ (b) $\frac{3}{15}$ (c) $\frac{8}{50}$

(d) $\frac{16}{100}$ (e) $\frac{10}{60}$ (f) $\frac{15}{75}$

(g) $\frac{12}{60}$ (h) $\frac{16}{96}$ (i) $\frac{12}{75}$

(j) $\frac{12}{72}$ (k) $\frac{3}{18}$ (l) $\frac{4}{25}$

7. अधोलिखितानां कृते उत्तरं ददतु । लिखन्तु दर्शयन्तु यत् भवन्तः कथम् एतेषां समाधानं कृतवन्तः इति ?

(a) किं $\frac{5}{9}$, $\frac{4}{5}$ इत्यस्य समभिन्नः अस्ति ? (b) किं $\frac{9}{16}$, $\frac{5}{9}$ इत्यस्य समभिन्नः अस्ति ?

(c) किं $\frac{4}{5}$, $\frac{16}{20}$ इत्यस्य समभिन्नः अस्ति ? (d) किं $\frac{1}{15}$, $\frac{4}{30}$ इत्यस्य समभिन्नः अस्ति ?

8. इला 100 पृष्ठयुक्तस्य एकस्य पुस्तकस्य 25 पृष्ठं पठति । ललिता अस्य एव पुस्तकस्य 1/2 भागं पठति । तर्हि का न्यूनं पठितवती ?

9. रफीफः एकस्याः होरायाः $\frac{3}{6}$ भागपर्यन्तं व्यायामं कृतवान् तथा रोहितः एकस्याः होरायाः $\frac{3}{4}$ भागपर्यन्तं व्यायामं कृतवान् । कः अधिकसमयं व्यायामं कृतवान् ।

10. एकस्यां A कक्ष्यायां 20 कक्ष्यायाम् 25 छात्रेषु प्रथमश्रेण्याम् उत्तीर्णाः अभवन् । B कक्ष्यायाम् 30 छात्रेषु 24 छात्राः प्रथमश्रेण्याम् उत्तीर्णाः अभवन् । कस्यां कक्ष्यायां छात्राणाम् अधिकभागे प्रथमश्रेण्याम् उत्तीर्णता लब्धा ?

7.10 भिन्नानां योगः व्यवकलनम्

अधुनापर्यन्तं वयं प्राकृतसङ्ख्यानां पूर्णसङ्ख्यानां तथा च पूर्णाङ्कानां विषये अध्ययनं कृतवन्तः । अस्मिन् अध्याये वयं नूतनप्रकारकसङ्ख्यानाम् अध्ययनं कुर्वन्तः स्मः यान् भिन्नाः इति वदामः ।

यदा कदापि अस्माभिः नूतनसङ्ख्याः प्राप्ताः भवन्ति तदा वयं तदुपरि संक्रियाः कर्तुं चिन्तनं कुर्मः । किं वयम् एतेषां योजनं कर्तुं शक्नुमः ? यदि शक्नुमः तर्हि कथम् ? किं वयम् एकस्यां सङ्ख्यायां अन्यसङ्ख्यां निष्कासितुं शक्नुमः ? अर्थात् किं वयम् एकस्याः सङ्ख्यायाः अन्यसङ्ख्यां व्यवकलयितुं शक्नुमः ? इत्यादयः । सङ्ख्यानां विषये पूर्वं पठितगुणाः किं एताः नूतनसङ्ख्याः अपि प्रभावयन्ति ? एतासां सङ्ख्यानां नूतनगुणाः के ? वयं एतदपि पश्यामः यत् एताः सङ्ख्याः अस्माकं दैनिकजीवने केन प्रकारेण उपयोगिन्यः सन्ति इति ।

एतत् उदाहरणं पश्यन्तु । एका चायापणिकः स्वापणे प्रातः $2\frac{1}{2}$ लीटर् दुग्धस्य तथा सायं $1\frac{1}{2}$ लीटर् दुग्धस्य उपयोगं करोति । स्वापणे सा एकस्मिन् दिने आहत्य कियतः दुग्धस्य प्रयोगं करोति ?

अथवा शेखरः मध्याह्नभोजने 2 रोटिकां खादितवान् रात्रिभोजने $1\frac{1}{2}$ रोटिकां खादितवान् । सः आहत्य कति रोटिकाः खादितवान् ?

स्पष्टमस्ति यत् द्वयोः अपि स्थित्योः भिन्नानां योजनम् आवश्यकम् अस्ति । एतेषु कियन्तः योगाः मौखिकरूपेण सरलतया कर्तुं शक्यते ।

प्रयत्नं कुर्वन्तु

1. मम माता एकं सेवफलं चतिर्भिः समानभागैः विभाजनं कृतवती । सा मह्यं 2 भागम् मम भ्रात्रे 1 भागं दत्तवती । तर्हि सा आवाभ्यां आहत्य सेवफलस्य कियन्तं भागं दत्तवती ?
2. माता नीलूम् तस्याः भ्रातरं गोधूमे विद्यमानान् उपलान् निष्कासयितुम् उक्तवती । नीलूः पूर्ण-उपलस्य $\frac{1}{4}$ भागं निष्कासितवती । तस्याः भ्राता अपि $\frac{1}{4}$ भागं निष्कासितवान् । तर्हि द्वावपि मिलित्वा उपलस्य आहत्य कियन्तं भागं निष्कासितवन्तौ ?
3. सोहनः स्व-अभ्यासपुस्तकस्य उपरि आच्छादन-कागदं स्थापयन् आसीत् । सः सोमवासरे $\frac{1}{4}$ भागम् आच्छादनकागदं स्थापितवान् । मङ्गलवासरे सः अन्यं $\frac{1}{4}$ भागम् आच्छादनकागदं स्थापितवान् तथा बुधवासरे सम्पूर्णं कृतवान् । तर्हि बुधवासरे सः आच्छादनकागदं कियन्तं भागं स्थापितवान् ?

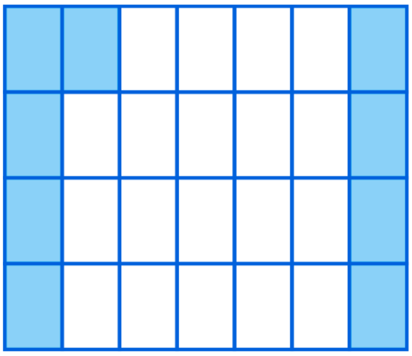
एतत् कुर्वन्तु

स्व-मित्रैः सह एवमेव दश-उगाहरणानि निर्मान्तु तेषां च समाधानं कुर्वन्तु ।

7.10.1 समानभिन्नानां योगः तथा व्यवकलनम्

सर्वान् भिन्नान् मौखिकरूपेण योजयितुं न शक्यते । अस्माभिः एतत् ज्ञातव्यं वर्तते यत् विभिन्नस्थितिषु एतान् कथं योजयामः चेत् प्रक्रियायाः पठनस्य आवश्यकता अपि वर्तते इति । वयं समानभिन्नानां योगेन प्रारम्भं कुर्मः ।

एकं 7 x 4 ग्रिड्-कागदं स्वीकुर्वन्तु (आकृतिः 7.13) । अस्य कागदस्य प्रत्येकं पङ्क्तौ 7 कोशाः सन्ति एवां प्रत्येकं स्तम्भे 4 कोशाः सन्ति ।

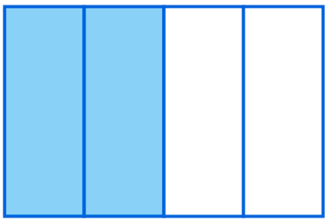


आकृति 7.13

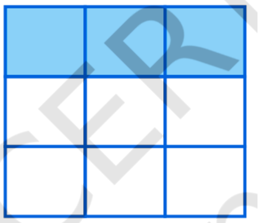
तर्हि अत्र कति कोशाः सन्ति ? एतेषु 5 कोशेषु हरितवर्णं पूरयन्तु । हरितक्षेत्रम् एकस्य पूर्णस्य कतमः भिन्नः अस्ति ? अधुना कागदस्य चतुर्षु कोशेषु पीतवर्णं पूरयन्तु । पीतवर्णयुक्तं क्षेत्रम् एकस्य पूर्णस्य कतमः भिन्नः अस्ति ? एकस्य पूर्णस्य आहत्य कतमः भिन्नः वर्णेन पूरितः अस्ति ? किं एतेन स्पष्टं भवति यत् $\frac{5}{28} + \frac{4}{28} = \frac{9}{28}$ अस्ति इति ?

इतोऽपि उदाहरणानि पश्यन्तु ।

अकृतौ 7.14 (i) इत्यत्र आकृतेः द्वितीय चतुर्थांशभागः छायाङ्कितः अस्ति । अस्यार्थः अयमस्ति यत् 4 इत्यस्मिन् 2 भागः अर्थात् आकृतेः $\frac{1}{2}$ भागः छायाङ्कितः अस्ति ।



आकृति 7.14 (i)



आकृति 7.14 (ii)

अर्थात् $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1+1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ अस्ति ।

आकृतिं 7.14 (ii) पश्यन्तु ।

आकृतिः 7.14 (ii) $\frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} = \frac{1+1+1}{9} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$ इति प्रदर्शयति ।

भवन्तः एतेभ्यः उदाहरणेभ्यः किं शिक्षितवन्तः ? वयं प्राप्तवन्तः यत् द्वयोः अथवा अधिकसमानभिन्नानां योगः एवमेव प्रकारेण प्राप्तुं शक्नुमः -

सोपानम् 1 अंशानां योजनं कुर्वन्तु ।

सोपानम् 2 समानभाजकान् तत्रैव स्थापयन्तु ।

सोपानम् 3 परिणामान् अस्मिन् रूपे लिखन्तु : $\frac{\text{प्रथमचरणस्य परिणामः}}{\text{द्वितीयचरणस्य परिणामः}}$

आयान्तु अनेन विधिना $\frac{3}{5}, \frac{1}{5}$ एतत् द्वयं योजयामः । वयं प्राप्नुमः यत् $\frac{3}{5} + \frac{1}{5} = \frac{3+1}{5} = \frac{4}{5}$

अधुना वदन्तु $\frac{7}{12}, \frac{3}{12}$ अनयोः योगफलं किम्?

प्रयत्नं कुर्वन्तु

1. आकृतीनां साहाय्येन योजयन्तु ।

   (i) $\frac{1}{8}+\frac{1}{8}$ (ii) $\frac{2}{5}+\frac{3}{5}$ (iii) $\frac{1}{12}+\frac{1}{12}+\frac{1}{12}$

2. $\frac{1}{12}+\frac{1}{12}$ अनयोः योजनेन वयं किं प्राप्नुमः ।

   भवन्तः चित्ररूपेण कथं दर्शयितुं शक्नुवन्ति ? कागद-पुटीकरण-क्रियया कथं दर्शयितुं शक्यते ?

3. यथा प्रश्नः 1 2 अस्ति तथैव इतोऽपि पञ्चप्रश्नान् निर्मान्तु ।

   स्वमित्रैः सह तेषां समाधानं कुर्वन्तु ।

शेषस्य अवगमनम्

शर्मिलायाः समीपे एकस्य केक् इति मधुरखाद्यस्य $\frac{5}{6}$ भागः आसीत् । सा केक् इत्यस्य $\frac{2}{6}$ भागं स्व-अनुजाय दत्तवती । तर्हि तस्याः पार्श्वे कियत् केक्-खाद्यं अवशिष्टम् ?

एकया आकृत्या इमां स्थितिं सरलतया स्पष्टीकर्तुं शक्नुमः । ध्यानं ददतु यत् अत्र समानभिन्नाः सन्ति (आकृतिः 7.15) ।

आकृति 7.15

वयं प्राप्नुमः यत् $\frac{5}{6}-\frac{2}{6}=\frac{5-2}{6}=\frac{3}{6}$ अर्थात् $\frac{1}{2}$ ।

(किम् एषः समानभिन्नानां योजनरूपविधिः नास्ति ?)

इत्थम्, वयं द्वयोः समानभिन्नयोः अन्तरं अधोलिखितप्रकारेण ज्ञातुं शक्नुमः ।

सोपानम् 1 बृहदंशः लघु-अंशस्य व्यवकलनं कुर्वन्तु ।

सोपानम् 2 भाजकं तथैव स्थापयन्तु ।

सोपानम् 3 भिन्नम् इत्थं लिखन्तु $\frac{\text{प्रथमचरणस्य परिणामः}}{\text{द्वितीयचरणस्य परिणामः}}$

किम् अधुना वयं $\frac{8}{10}$ इत्यस्मात् $\frac{3}{10}$ व्यवकलयितुं शक्नुमः ?

प्रयत्नं कुर्वन्तु

1. $\frac{7}{8}$, $\frac{3}{8}$ अनयोः अन्तरं जानन्तु ।

2. माता एकां गुडस्य पट्टिकां गोलाकारेण निर्मितवती । सा ताम् 5 समानभागैः विभाजितवती । सीमा तेषु एकं भागं खादितवती । यदि अहम् अन्यम् एकं भागं स्वीकरोमि तर्हि गुडपट्टिकायाः कियान् भागः अवशिष्टः भवति ।

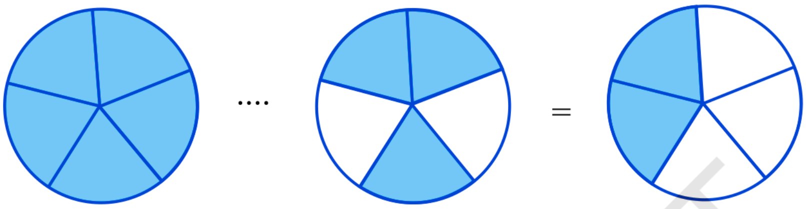
3. मम अग्रजा एकं कलिङ्गफलं 16 समानभागैः विभजनं कृतवती। मया फलस्य 7 भागाः खादिताः। मम मित्रेण 4 भागाः खादिताः। आवां मिलित्वा कियत्कलिङ्गभागं खादितवन्तौ? मया ममित्रादपि कियान् अधिकः कलिङ्भागः खादितः? कियान् भागः अवशिष्टः?

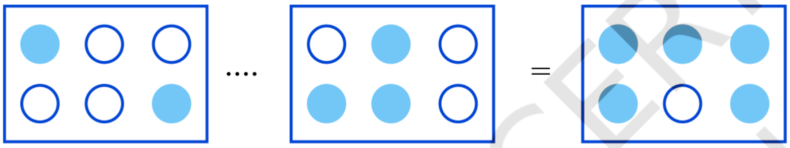
4. इत्थम् एव इतोऽपि पञ्च-प्रश्नान् निर्मान्तु तथा मित्रैः सह समाधानं कुर्वन्तु।

अभ्यासः 7.5

1. अधोलिखितभिन्नान् योगस्य व्यवकलनस्य च उचितरूपेण लिखन्तु।

(a)

(b) 

(c) 

2. समाधानं कुर्वन्तु।

(a) $\frac{1}{18} + \frac{1}{18}$ (b) $\frac{8}{15} + \frac{3}{15}$ (c) $\frac{7}{7} - \frac{5}{7}$

(d) $\frac{1}{22} + \frac{21}{22}$ (e) $\frac{12}{15} - \frac{7}{15}$ (f) $\frac{5}{8} + \frac{3}{8}$

(g) $1 - \frac{2}{3} \left(1 = \frac{3}{3}\right)$ (h) $\frac{1}{4} + \frac{0}{4}$ (i) $3 - \frac{12}{5}$

3. शुभम् स्व-प्रकोष्ठस्य भित्तेः $\frac{2}{3}$ भागं वर्णीकृतवान्। तस्याः भगिनी माधवी तस्याः कृते साहाय्यं कृतवती तथा तस्याः भित्तेः $\frac{1}{3}$ भागं वर्णीकृतवती। ताभ्यां द्वाभ्यां मिलित्वा आहत्य कियान् भागः वर्णात्मकः जातः?

4. रिक्तस्थानं पूरयन्तु।

(a) $\frac{7}{10} - \square = \frac{3}{10}$ (b) $\square - \frac{3}{21} = \frac{5}{21}$

(c) $\square - \frac{3}{6} = \frac{3}{6}$ (d) $\square + \frac{5}{27} = \frac{12}{27}$

5. जावेदन नारङ्गफलस्य पेटिकायाः $\frac{5}{27}$ भागः प्राप्तः। पेटिकायां नारङ्गफलस्य कतमः भागः अवशिष्टः ?

7.10.2 भिन्नानां योजनम् व्यवकलनम्

वयं समानभिन्नानां योगस्य तथा व्यवकलनस्य अध्ययनं कृतवन्तः। येषां भिन्नानां भाजकः समानः नास्ति तेषां योजनं तथा व्यवकलनम् अपि कठिनं नास्ति। यदा भिन्नानां योजनं तथा व्यवकलनं करणीयं भवति तर्हि अस्माभिः प्रथमं दत्तभिन्नाः समानभाजकभिन्नेषु परिवर्तनीयाः सन्ति अग्रे चलन्तु।

$\frac{1}{5}$ इत्यत्र किं योजनेन $\frac{1}{2}$ इत्यस्य प्राप्तिः भवति ? अस्य अयमर्थः यत् इच्छितसङ्ख्यां प्राप्तुं $\frac{1}{2}$ इत्यस्मात् $\frac{1}{5}$ इत्यस्य व्यवकलनं कुर्वन्तु।

यतो हि $\frac{1}{5}$ $\frac{1}{2}$ असमानभिन्नौ स्तः अतः व्यवकलयितुं प्रथमं वयं समानभाजकयुक्तभिन्नेषु परिवर्तयामः। $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{5}$ अनयोः समानभाजकयुक्तः तुल्यभिन्नः क्रमशः $\frac{5}{10}$ $\frac{2}{10}$ अस्ति।

एतदर्थम् अस्ति यत् $\frac{1}{2} = \frac{1 \text{ X } 5}{2 \text{ X } 5} = \frac{5}{10}$ च $\frac{1}{5} = \frac{1 \text{ X } 2}{5 \text{ X } 2} = \frac{2}{10}$ अस्ति।

अतः $\frac{1}{2} - \frac{1}{5} = \frac{5}{10} - \frac{2}{10} = \frac{5-2}{10} = \frac{3}{10}$

उदहरणम् 8 : 5/6 इत्यस्मात् 3/4 इत्यस्य व्यवकलनं कुर्वन्तु।

समाधानम् : अस्माभिः समानभाजकयुक्तस्य $\frac{3}{4}$ $\frac{5}{6}$ अनयोः तुल्यभिन्नस्य निर्माणं कर्तव्यम् अस्ति।

एषः भाजकयोः 4 6 इत्यनयोः ल.सा.अ. 12 अस्ति।

अतः, $\frac{5}{6} - \frac{3}{4} = \frac{5 \text{ X } 2}{6 \text{ X } 2} - \frac{3 \text{ X } 3}{4 \text{ X } 3} = \frac{10}{12} - \frac{9}{12} = \frac{1}{12}$

उदाहरणम् 9 : $\frac{2}{5}$ $\frac{1}{3}$ अनयोः योजनं कुर्वन्तु।

समाधानम् : 5 3 अनयोः ल.सा.अ 15 अस्ति।

अतः $\frac{2}{5} + \frac{1}{3} = \frac{2 \text{ X } 3}{5 \text{ X } 3} + \frac{1 \text{ X } 5}{3 \text{ X } 5} = \frac{6}{15} + \frac{5}{15} = \frac{11}{15}$

उदाहरणम् 10 : सरलं कुर्वन्तु : 3/5 -7/20

समाधानम् : 5 20 अनयोः ल.सा.अ. 20 अस्ति।

अतः, $\frac{3}{5} - \frac{7}{20} = \frac{3 \text{ X } 4}{5 \text{ X } 4} - \frac{7}{20} = \frac{12}{20} - \frac{7}{20}$

$= \frac{12-7}{20} = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}$

प्रयत्नं कुर्वन्तु

1. $\frac{2}{5}$ $\frac{3}{7}$ अनयोः योजनं कुर्वन्तु।

2. $\frac{5}{7}$ इत्यस्मात् $\frac{2}{5}$ इत्यस्य व्यवकलनं कुर्वन्तु।

वयं केन प्रकारेण मिश्रितभिन्नानां योजनं कुर्मः व्यवकलनं कुर्मः ?

मिश्रितभिन्नाः एकेन पूर्णभागरूपेण अथवा एकेन उचितभिन्नस्य योगरूपेण लिख्यन्ते अथवा पूर्णतया एकानुचितभिन्न(विषमभिन्न) रूपेण निरूपयन्ति। मिश्रितभिन्नानां योगस्य (व्यवकलनस्य) एकः विधिः एषः अस्ति यत् पूर्णभागानां तथा भिन्नीयभागनाम् उपरि संक्रियाः पृथक् पृथक् करणीयाः भवन्ति तथा अन्यः विधिः एषः अस्ति यत् तान् प्रथमं विषमभिन्नेषु परिवर्त्य अनन्तरं साक्षात् तेषां योजनम्।

उदाहरणम् 11 : $2\frac{4}{5}$ $3\frac{5}{6}$ अनयोः योगं कुर्वन्तु।

समाधानम् : $2\frac{4}{5} + 3\frac{5}{6} = 2 + \frac{4}{5} + 3 + \frac{5}{6} = 5 + \frac{4}{5} + \frac{5}{6}$

अधुना, $\frac{4}{5} + \frac{5}{6} = \frac{4 X 6}{5 X 6} + \frac{5 X 5}{6 X 5}$ (यतो हि 5 6 अनयोः ल.सा. अ. 30) |

$= \frac{24}{30} + \frac{25}{30} = \frac{49}{30} = \frac{30 + 19}{30}$

$= 1 + \frac{19}{30}$

इत्थम्, $5 + \frac{4}{5} + \frac{5}{6} = 5 + 1 + \frac{19}{30}$

$= 6 + \frac{19}{30} = 6\frac{19}{30}$

अतः, $2\frac{4}{5} + 3\frac{5}{6} = 6\frac{19}{30}$

चिन्तयन्तु चर्चां कुर्वन्तु लिखन्तु।

किं भवन्तः अस्य प्रश्नस्य समाधानं कर्तुं अन्यां प्रक्रियां ज्ञातुं शक्नुवन्ति ?

उदाहरणम् 12 : $4\frac{2}{5} - 2\frac{1}{5}$ जानन्तु।

समाधानम् : पूर्णसंख्ये 4 2 तथा भिन्नात्म-सङ्ख्ये $\frac{2}{5}$ $\frac{1}{5}$ एते पृथक्तया व्यवकलयितुं शक्यते।

अवधानं ददतु यत् $4 > 2$ अस्ति $\frac{2}{5} > \frac{1}{5}$ अस्ति।

अतः $4\frac{2}{5} - 2\frac{2}{5} = (4-2) + \left(\frac{2}{5} - \frac{1}{5}\right) = 2 + \frac{1}{5} = 2\frac{1}{5}$

उदाहरणम् 13 : सरलीकुर्वन्तु : $8\frac{1}{4} - 2\frac{5}{6}$

समाधानम् : अत्र $8 > 2$ अस्ति $\frac{1}{4} < \frac{5}{6}$ अस्ति। अधोलिखितप्रकारेण अस्य प्रश्नस्य समाधानं कर्तुं शक्नुमः।

$8\frac{1}{4} = \frac{(8 \text{ X } 4) + 1}{4} = \frac{33}{4}$ तथा $2\frac{5}{6} = \frac{2\text{x}6 + 5}{6} = \frac{17}{6}$

अधुना, $\frac{33}{4} - \frac{17}{6} = \frac{33 \text{ X } 3}{12} - \frac{17 \text{ X } 2}{12}$

(यतो हि 4 एवम् 6 अनयोः ल.सा.अ. 12 अस्ति)

$= \frac{99 - 34}{12} = \frac{65}{12} = 5\frac{5}{12}$

अभ्यासः 7.6

1. समाधानं कुर्वन्तु।

(a) $\frac{2}{3} + \frac{1}{7}$ (b) $\frac{3}{10} + \frac{7}{15}$ (c) $\frac{4}{9} + \frac{2}{7}$ (d) $\frac{5}{7} + \frac{1}{3}$

(e) $\frac{2}{5} + \frac{1}{6}$ (f) $\frac{4}{5} + \frac{2}{3}$ (g) $\frac{3}{4} + \frac{1}{3}$ (h) $\frac{5}{6} + \frac{1}{3}$

(i) $\frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{1}{2}$ (j) $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$ (k) $1\frac{1}{3} + 3\frac{2}{3}$

(l) $4\frac{2}{3} + 3\frac{1}{4}$ (m) $\frac{16}{5} + \frac{7}{5}$ (n) $\frac{4}{3} + \frac{1}{2}$

2. सरिता $\frac{2}{5}$ मी. केशबन्धकं (रिबन्) क्रीतवती ललिता $\frac{3}{4}$ मी.। तर्हि द्वे अपि मिलित्वा आहत्य कियन्तं केशबन्धकं क्रीतवत्यौ ?

3. नयनया केक्-खाद्यस्य $1\frac{1}{2}$ भागः प्राप्तः नजमया $1\frac{1}{3}$ भागः। द्वाभ्यां मिलित्वा कियतः केक्-खाद्यस्य भागः प्राप्तः ?

4. रिक्तस्थानं पूरयत : (a) $\square - \frac{5}{8} = \frac{1}{4}$ (b) $\square - \frac{1}{5} = \frac{1}{2}$

(c) $\frac{1}{2} - \square = \frac{1}{6}$

5. योग-व्यवकलनमञ्जूषां पूरयन्तु।

(a) (→ + ; ↓ −)

$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{3}$	
$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	

(b) (→ + ; ↓ −)

$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	

6. $\frac{7}{8}$ मीटर्. तन्त्री भागद्वयेन विभजिता। एकः भागः $\frac{1}{4}$ मीटर् अस्ति, तर्हि द्वितीयभागः कति मीटर् अस्ति ?

7. नन्दिन्याः गृहं तस्याः विद्यालयात् $\frac{9}{10}$ किमी दूरे अस्ति। सा स्वल्पं दूरं पद्भ्यां चलति पुनः $\frac{1}{2}$ किमी दूरं लोकयाने चलति। सा कियद्दूरं पद्भ्यां चलति ?

8. आशा सेम्युलः इत्यनयोः द्वयोः पार्श्वे पुस्तकस्थापनार्थं द्वे सदृशकपाटिके स्तः। आशायाः कपाटिकायाः $\frac{5}{6}$ भागः पुस्तकैः पूरितः अस्ति सेम्युलस्य कपाटिकायाः $\frac{2}{5}$ भागः भरितः अस्ति। तर्हि कस्य कपाटिका अधिकतया भरिता अस्ति ? कियान् अधिकः ?

9. जयदेवः स्व-शालायाः क्रीडाक्षेत्रस्य $2\frac{1}{5}$ निमेषैः भ्रमणं करोति। राहुलः एतदर्थं $\frac{7}{4}$ निमेषान् स्वीकरोति। एतयोः कः न्यूनसमयं स्वीकरोति ? कियत् न्यूनं स्वीकरोति ?

वयं किं चर्चितवन्तः ?

1. (a) एकः भिन्नः एतादृश-सङ्ख्या अस्ति या एकस्य पूर्णस्य एकं भागं निरूपयति अथवा सङ्ख्यारेखायाः उपरि सङ्क्रियाणां निरूपणं करोति। पूर्णः एकम् अनन्यवस्तु अपि भवितुं शक्नोति वस्तूनां समूहः अपि।

(b) कस्यामपि स्थितौ कृतगणनभागान् भिन्नेषु व्यक्तीकर्तुम् एतत् आवश्यकं भवति यत् तेषां सर्वे भागाः समानाः स्युः ।

2. $\frac{5}{7}$ इति भिन्ने 5 अंशः तथा 7 भाजकः इति कथ्यते ।

3. भिन्नान् सङ्ख्या-रेखायाः उपरि अपि दर्शयितुं शक्यते । प्रत्येकं भिन्नस्य कृते सङ्ख्यारेखायां निश्चितबिन्दुः भवति।

4. एकस्मिन् उचिते भिन्ने अंशः भाजकात् लघुः भवति । विषमे भिन्ने भाजकः सर्वदा महान् भवति । विषमभिन्नं पूर्णसहितभागरूपेण अपि लेखितुं शक्यते । अस्यां स्थितौ एषः भिन्नः मिश्रितभिन्नः इत्युच्यते ।

5. द्वौ भिन्नौ तुल्यभिन्नौ इत्युच्येते यदि तौ समानमानं निरूपयतः । प्रत्येकं समभिन्नस्य अथवा विषमभिन्नस्य अनेकतुल्यभिन्नाः भवन्ति । एकस्य दत्तभिन्नस्य तुल्यभिन्नं निष्कासयितुं वयं भिन्नस्य अंशं तथा भाजकं समानशून्येतरसंख्यया गुणनम् अथवा भागं कर्तुं शक्नुमः ।

6. एकः भिन्नः स्व-सरलतम (न्यूनतम) रूपेण तदा एव भवति यदि तस्य अंशे तथा भाजके 1 सङ्ख्यां विना अन्यः कोऽपि उभयनिष्ठः अथवा सामान्यगुणनखण्डः न स्यात् ।